E.N.S. ULM–SEVRES GROUPE B

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Introduction

Soit C une courbe du plan euclidien et l un nombre réel fixé, $l > 0$. On appelle Γ l'ensemble des points M qui sont des milieux de cordes $M_1 M_2$, avec $M_1 \in C$, $M_2 \in C$, $\| \overrightarrow{M_1 M_2} \| = 2\,l$.

Dans un repère orthonormé convenablement choisi, on désigne alors les abscisses de M, M_1, M_2 par x, $x - u$, $x + u$, avec $u \geqslant 0$.

Lorsque cette quantité est bien définie, on appelle $A(l)$ l'aire comprise entre les courbes C et Γ.

PREMIÈRE PARTIE

1° La courbe C est un cercle de rayon $R \geqslant l$.

Déterminer Γ et calculer $A(l)$.

2° La courbe C est la réunion de deux demi-droites fermées de même origine O et d'angle α, $\alpha \in]0, \pi[$.

Déterminer Γ et calculer $A(l)$ en fonction de α.

3° La courbe C est un polygone convexe fermé et borné. On suppose que tous les angles de C sont obtus ou droits et que tous les côtés et toutes les diagonales de C sont de longueur supérieure à $2\,l$.

Préciser Γ et calculer $A(l)$.

DEUXIÈME PARTIE

La courbe $C = C_k$ est la branche d'hyperbole définie par $xy = k$, $x \in]0 + \infty[$, $k > 0$.

1° Déterminer l'ensemble $\Gamma = \Gamma_k$ (on pourra montrer que Γ_k a une représentation paramétrique en fonction de u, voir notation de l'introduction).

Montrer que Γ_k est le graphe d'une fonction g_k continue et dérivable (on ne cherchera pas à calculer explicitement g_k).

Donner une représentation de Γ_k en coordonnées polaires.

2° Calculer l'aire $A_k(l)$ comprise entre C_k et Γ_k.

3° Étudier la convergence de la suite de fonctions $(g_{1/n})$, $n \in \mathbb{N}^*$, sur $]0, + \infty[$, lorsque n tend vers l'infini.

4° Calculer la courbure γ_k de Γ_k au point B_k d'intersection de Γ_k et de son axe de symétrie.

Étudier la variation de γ_k en fonction de k.

Préciser l'ensemble décrit par le centre de courbure Ω_k correspondant lorsque k décrit l'intervalle $]0, + \infty[$ (les valeurs numériques seront données à 10^{-8} près).

TROISIÈME PARTIE

Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que f est convexe et croissante (c'est-à-dire que la dérivée f' est croissante et positive ou nulle).

On rappelle que $f'(x)$ a une limite, finie ou infinie, lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$). Cette limite sera notée $\tan\alpha$ (resp. $\tan\beta$).

Soit C le graphe de f, Γ la courbe associée.

1° Montrer, avec les notations de l'introduction, que $x \longmapsto u(x)$ définit une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $]0, l]$. En déduire que Γ est aussi le graphe d'une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1.

2° On pose :

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_{-x}^{x} [f(t + u(t)) + f(t - u(t)) - 2f(t)]\, dt.$$

Montrer par intégration par parties et changement de variables que l'on a :

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\int_{x}^{x + u(x)} f(t)\, dt - \int_{x - u(x)}^{x} f(t)\, dt \right) + \frac{1}{2}\left(\int_{-x - u(-x)}^{-x} f(t)\, dt \right.$$
$$\left. - \int_{-x}^{-x + u(-x)} f(t)\, dt \right) - \frac{1}{2}\left[l^2 \operatorname{Arcsin} \frac{u(t)}{l} + u(t)\sqrt{l^2 - u(t)^2} \right]_{-x}^{x}$$

3° En déduire l'aire $A(l)$ comme une fonction simple de α et β.

Indiquer qualitativement comment on doit modifier le résultat et la démonstration si f n'est plus supposée croissante.